INTUITION GEOMETRIQUE — INTUITION PHYSIQUE

G. Châtelet
Université de Paris VIII, Paris, France

ABSTRACT

Geometric intuition, when compared to calculus, is often considered as a mere "illustration". We grant geometry for being a source of visual evidence, for global understanding but suspect it to be less rigorous.

The situation is worse as far as Mathematics and Physics are concerned : poor epistemology generally considers Physics as "dirty mathematics" and mathematical objects as "tools for physicists" committed to produce "models".

Through a brief analysis of some prominent scientific events of the early XIXth century : invention of the Argand plane, Hamilton's theory of quaternions, Galois theory of equations, Ampère-Faraday-Maxwell electromagnetic theory, we sketch another point of view ; we try to understand what we suggest to call modern physico-mathematics (<u>very different from the so-called Mathematical Physics</u> !).

Classical geometry was devoted to the study of figures and distance ratios of real objets.

"Abstract" algebraic operations and geometric intuition remained separated. With the Argand-Wessel plane and quaternionic geometry, the very constitution of time and space became an object of mathematical investigations. Following Hamilton we have to "regard Algebra as being no mere Art, nor language, nor primarily a Science of Quantity but rather as <u>Science of order in progression</u>". J. C. Maxwell perfectly understood this revolution and "this mode of contemplating geometrical and physical quantities more primitive and more natural than the other."

Combined with Faraday's "lines of force", Maxwell succeeded in his attempt to create a true <u>electrogeometric space</u>.

In an apparently very different domain, Galois theory of equations does not urge to find formulaes giving the roots (x = ?) but describes the very process of discerning the roots. Geometry, Physics, Algebra do not want only to identify individuals any more, but try to produce them and a systematic use of diagramms is the specific language of this triple alliance. Physico-mathematical diagramms possess the great creative power of sketching the very acts of getting acquainted with some continuum.

Le lecteur moderne, toujours un peu pressé, serait probablement perplexe et agacé par les "Lectures on Quaternions" de Hamilton. Il pesterait certainement en tous cas contre les cinquante pages consacrées à la définition des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Un de nos excellents ouvrages d'algèbre n'écrit-il pas que : "L'espace-temps n'est que l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique (-+++). Pourquoi faire tant d'histoires ?"

"Notre" espace ne serait donc qu'un "misérable cas particulier" de $\mathbb{R}^n$. Comprendre l'espace serait simplement "abstraire", "généraliser" et bien sûr "formaliser"! L'opinion courante brode souvent sur le thème : "la géométrie illustre les calculs algébriques - on voit mieux mais sa rigueur laisse à désirer" ou "la physique n'est qu'une cuisine sordide, une mathématique mal dégrossie"[(1)]. La mathématique est toujours la reine des sciences (l'arithmétique en étant le plus précieux joyau), mais on exige paradoxalement qu'elle se rende "utile", qu'elle troque à volonté son sceptre contre un tablier de bonne à tout faire.

Nous espérons ici, à l'aide de quelques exemples contribuer à la réflexion sur des questions comme "l'application de la mathématique à la physique est-elle providentielle?" Cette application est-elle nécessairement un rapport de subordination ? Quels sont les rapports entre intuition géométrique, calcul algébrique et sens "physique" ?

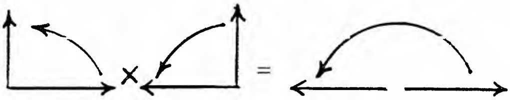
Mentionnons tout d'abord un fait historique surprenant : l'identification des nombres imaginaires au plan n'apparaît dans la littérature mathématique qu'au début du XIXe siècle[(2)]. La synthèse des gestes géométrique effectués dans le continuum à deux dimensions et des calculs impliquant les "quantités impossibles" a donc demandé presque trois siècles !

Les mathématiques du XVIIIe siècle avaient pourtant déjà abordé des problèmes beaucoup plus compliqués ! La frontière qui séparait alors intuition spatiale et entendement déductif délimitait strictement les domaines de l'algèbre (la science des magnitudes) et de la géométrie (la science des figures).

Leibniz n'appréciait guère ce divorce et avait pressenti la possibilité de calculer sur les "rapports de situations" (Analysis Situs) comme en témoigne sa lettre à C. Huyghens : "J'ai trouvé quelques éléments d'une nouvelle caractéristique tout à fait différente de l'algèbre, et qui aura de grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoique sans figures, tout ce qui dépend de l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres indéterminés et des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de réduire dans un calcul ce qui est dans la figure" ou encore "Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'a examiner les qualités des matérieux, par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures, de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abrégé pour soulager l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnements géométriques necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie."

Naturellement, ainsi séparés, algèbre et géométrie entretiennent de curieux rapports de prédation réciproque : l'algèbre aboutit toujours en évitant les pièges des figures et la géométrie, en retour, garantit le caractère "réel", tangible des calculs algébriques qui, sans elle, ne seraient que de pures abstractions. La géométrie fait qu'"ils sautent aux yeux". Les objets "réels" de notre espace et leurs rapports de distance incarnent une <u>évidence</u> qui force la conviction et restent par là-même les <u>dépositaires</u> de la vérité mathématique. L'existence "réelle" de la dynamique, de la cinématique étaient censée bien montrer que les formes algébriques n'étaient pas de "pures vues de l'esprit" et réglaient les lois de la nature.

Avec le plan complexe d'Argand-Wessel, puis avec les quaternions de Hamilton et l'algèbre de Grassmann, une bouleversement se produit, on "y voit" enfin la multiplication des imaginaires (qui deviennent alors prétendument imaginaires). La relation $i^2 = -1$ n'apparaît plus comme une relation satisfaite par une "grandeur impossible" [3]. La multiplication des grandeurs n'était auparavant saisie qu'au travers de changement d'unité. Désormais, un <u>geste</u> géométrique - une rotation ! - accompagne le mystérieux symbole i

$i^2 = -1$ s'écrit 

L'intuition géométrique n'est plus seulement l'espèce d'inspection oculaire qui vérifiait l'accord des calculs mathématiques et des mesures d'objets réels, elle est désormais bien plus la possibilité de saisir par diagramme les gestes de conquête de l'espace et consacre ainsi l'émergence d'un continuum physico-géométrique à deux dimensions aussi éloigné du plan d'Euclide que de "l'espace vectoriel abstrait $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ " de nos formalistes !

Les "Lectures on Quaternions" réussissent ensuite à donner à ces actes d'investigations de l'espace le caractère systématique de l'algèbre. Partant des points - le geste primordial de prise de position - il définit les vecteurs et leur addition. On savait naturellement depuis longtemps construire des parallélogrammes de forces et de vitesses[4] mais les vecteurs n'étaient compris que comme suivant la virulence d'une force ou la fulguration d'une célérité et non comme notion géométrique autonome.

Notre espace affine naît avec Hamilton. L'homothétie, l'addition et la multiplication vectorielles naissent par une sorte d'ascèse qui révèle un geste certes dépouillé, le "vection act", le vecteur comme visée virtuelle et transport, mais nullement "abstrait" de la réalité sensible. Le continuum physico-géométrique est bien apprécié comme domaine d'exercice d'une véritable géométrie expérimentale[5].

Hamilton introduit la notion de vecteurs en considérant deux points A et B. A est la position donnée de l'observateur, "l'analyseur" et B ce que je vise, ce vers quoi je tends, ce que je détermine "l'analysand". B - A est le symbole par lequel je m'approprie B par la pensée en le joignant à A par une ligne droite. L'addition, et la formule $A + (B - A) = B$, s'écrit $A + \vec{V} = B$ (avec $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$). B est alors produit. Avec le signe -, B était simplement observé de A. Il est maintenant conquis par vection et ce transport s'écrit $A + \vec{V} = B$.

"In this way, the symbol B-A has come with us to denote the straight line from A to B ; the point A being (at first) considered as a known thing, or a datum in some geometrical investigation, and the point B being (by contrast) regarded as a sought thing, or a quaesitum : while B - A is at first supposed to be a representation of the ordinal relation in space, of the sought point B to the given point A ; or of the geometrical DIFFERENCE of those two points, that is to say, the difference of their TWO POSITIONS in space ; and this difference is supposed to be exhibited or constructed by a straight line. Thus, in the astronomical example of earth and sun, the line B-A has been seen to extend from the place of observation A (the earth), to the place of the observed body B (the sun) ; and to serve to CONNECT, at least in thought, the latter position with the former.

Again you have seen that with me the primary geometrical operation denoted by the mark +, and called by the name ADDITION, or more fully, symbolical Addition, consists in a certain correspondent ordinal SYNTHESIS of the position of a mathematical point in space. Instead of comparing such a position, B, with another position A, we now regard ourselves as deriving the one position from the other. The point B had been before a punctum analyzandum ; it is now a punctum constructum. It was lately the subject of an analysis ; it is now the result of a synthesis. It was a mark to be aimed at ; it is now the end of a flight, or of a journey. It was a thing to be investigated (analytically) by our studying or examining its position ; it is now a thing which has been produced by our operating (synthetically) on another point A, with the aid of a certain instrument, namely, the straight line B-A, regarded now as a VECTOR, or carrying path, as is expressed by the employment of the SIGN OF VECTION, +, through the general and identical formula :

$$(B - A) + A = B.$$

That other point A, instead of being now a punctum analyzans, comes to be considered and spoken of as a punctum vehendum, or more briefly, and with phrases of a slightly less foreign form, it was an analyzer, but is now a VEHEND ; while the point B, which had been an analyzand, has come to be called a VECTUM, according to the general formula :

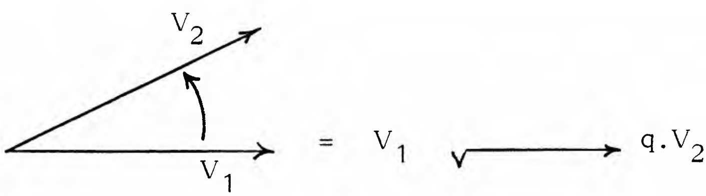
$$\text{Vector} + \text{Vehend} = \text{Vectum} ;$$

where Plus is (as above remarked) the Sign of Vection, or the characteristic of ordinal synthesis. From serving, in the astronomical example, as a post of observation, the earth, A, comes to be thought of as the commencement of a transition, B - A, which while thus beginning at the earth is conceived to terminate at the sun ; and conversely the sun, B, is thought of as occupying a situation in space, which is not now proposed to be studied by observation, but is rather conceived as one which has been reached, or arrived at, by a journey, transition, or transport of some moveable point or body from the earth, along the geocentric vector of the sun."

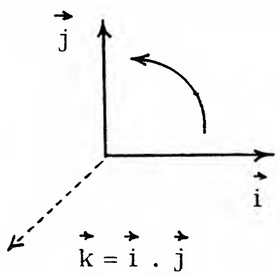
Hamilton définissait son algèbre comme le science du temps pur[6]. Il entendait par là que le temps du géomètre était scandé par les différentes étapes d'une conquête progressive de l'espace. Pour Hamilton, il ne suffit pas de comparer les autres points à un point de référence (ce que permettent la définition des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, de l'addition et de la multiplication par des scalaires[7]). Il faut aussi explorer les entours de A et introduire les rotations. Comme dans le cas des complexes, il définit le rapport de deux vecteurs non colinéaires (figure ci-dessous).

"The Analysis and Synthesis, hitherto considered by us, have been of an ORDINAL kind ; but we now proceed to the consideration of a different and a more complex sort of analysis and synthesis, which may, by contrast and analogy, be called CARDINAL. As we before (analytically) compared a POINT B, with a point A, with a view to discover the ordinal relation in space of the one point to the other ; so we shall now go on to compare one directed line, or vector, or RAY, β, with another ray, α, to discover what (in virtue of the contrast and analogy just now referred to) I shall venture to call the cardinal relation of the one ray to the other, namely, (as will soon be more clearly seen), a certain complex relation of length and of direction."

Il est bien connu qu'un calcul compliqué est nécessaire pour connaître les coefficients d'une rotation de l'espace déterminée par deux vecteurs, alors que la géométrie la voit "d'un coup d'oeil". Grâce aux quaternions, l'algèbre est aussi prompte que l'intuition géométrique.



L'algèbre est bien la science de l'ordre en train de se construire. L'espace n'est plus saisi seulement de l'extérieur par le quadrillage cartésien ; les actes de choix d'échelle, de composition de transport (addition vectorielle) et de multiplication de directions sont définis. Il s'établit ainsi une articulation interne entre opération et intuition qui confère à l'espace quaternionique une dynamique tout à fait spécifique. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ne sont plus simplement des vecteurs de bases mais dirigent des rotations virtuelles[8] comme le montre leur loi de composition



Hamilton pressentait le caractère physico-mathématique de sa découverte et J. C. Maxwell lui rend souvent hommage[9]. Les quaternions ne sont pas seulement le premier corps non commutatif :

"Now Quaternions, or the doctrine of Vectors, is a mathematical method, but it is a method of thinking, and not, at least for the present generation, a method of saving thought... It calls upon us at every step to form a mental image of the geometrical features represented by the symbols, so that in studying geometry by this method we have our minds engaged with geometrical ideas, and are not permitted to fancy ourselves geometers when we are only arithmeticians."

ou encore :

"A most important distinction was drawn by Hamilton when he divided the quantities with which he had to do into scalar quantities... and vectors.... The invention of the calculus of Quaternions is a step towards the knowledge of quantities related to space which can only be compared for its importance, with the invention of triple coordinates by Descartes".

Dans la lignée d'Ampère et de Faraday, les équations de Maxwell consacrent l'émergence d'un espace électro-géométrique[10].

"The only experimental fact which we have made use of in this investigation is the fact established by Ampère that the action of a closed circuit on any portion of another circuit is perpendicular to the direction of the latter. Every other part of the investigation depends on purely mathematical considerations depending on the properties of lines in space. The reasoning therefore may be presented in a much more condensed and appropriate form by the use of the ideas of language of the mathematical method specially adapted to the expression of such geometrical relations - the Quaternions of Hamilton." (J. C. Maxwell)

Pour produire ses concepts, le physicien provoque en quelque sorte le champ par différentes espèces d'interventions spatiales. Cette géométrie expérimentale ne se manifeste pas tant par des prises immédiates de position mais par des saisies différentielles ! translations infinitésimales pour le gradient, petites boucles entourant un circuit pour le rotationnel, volumes infinitésimaux qui enveloppent une source pour définir la divergence[11].

La théorie du champ de Maxwell rend manifeste la communauté profonde et nécessaire entre géométrie et physique. Une classification mathématique des grandeurs physiques s'impose. C'est l'objet du célèbre article "Sur la classification mathématique des quantités physiques" :

"According to Ampère and all his followers, however, electric currents are regarded as a species of translation, and, magnetic force as depending on rotation. I am constrained to agree with this view, because the electric current is associated with electrolysis, and other undoubted instances of translation, while magnetism is associated with the rotation of the plane of polarization of light, which, as Thomson has shewn, involves actual motion of rotation.

The Hamiltonian operator ∇, applied to any vector function, converts it from translation to rotation, or from rotation to translation, according to the kind of vector to which it is applied.

I shall conclude by proposing for the consideration of mathematicians certain phrases to express the results of the Hamiltonian operator ∇. I should be greatly obliged to anyone who can give me suggestions on this subject, as I feel that the onomastic power is very faint in me, and that it can be successfully exercised only in societies.

∇ is the operation $i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$, where i, j, k are unit vectors parallel to x, y, z respectively. The result of performing this operation twice on any subject is the well known operation (of Laplace)

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right).$$

The discovery of the square root of this operation is due to Hamilton.

And, first, I propose to call the result of ∇^2 (Laplace's operation with the negative sign) the Concentration of the quantity to which it is applied.

For if Q be a quantity, either scalar or vector, which is a function of the position of a point ; and if we find the integral of Q taken throughout the volume of a sphere whose radius is r ; then if we divide this by the volume of the sphere, we shall obtain $\bar{Q}$, the mean value of Q within the sphere. If Q_o is the value of Q at the centre of the sphere, then, when r is small,

$$Q_o - \bar{Q} = \frac{r^2}{10}\nabla^2 Q,$$

or the value of Q at the centre of the sphere exceeds the mean value of

Q within the sphere by a quantity depending on the radius, and on $\nabla^2 Q$. Since, therefore, $\nabla^2 Q$ indicates the excess of the value of Q at the centre above its mean value in the sphere, I shall call it the concentration of Q.

If Q is a scalar quantity, its concentration is, of course, also scalar. Thus, if Q is an electric potential, $\nabla^2 Q$ is the density of the matter which produces the potential.

If Q is a vector quantity, then both Q_o and $\bar{Q}$ are vectors, and $\nabla^2 Q$ is also a vector, indicating the excess of the uniform force Q_o applied to the whole substance of the sphere above the resultant of the actual force Q acting on all the parts of the sphere.

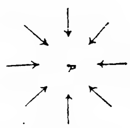
Let us next consider the Hamiltonian operator ∇. First apply it to a scalar function P. The quantity ∇P is a vector, indicating the direction in which P decreases most rapidly, and measuring the rate of that decrease. I venture, with much diffidence, to call this the slope of P. Lamé calls the magnitude of ∇P the "first differential parameter" of P, but its direction does not enter into his conception. We require a vector word, which shall indicate both direction and magnitude, and one not already employed in another mathematical sense. I have taken the liberty of extending the ordinary sense of the word slope from topography, where only two independent variables are used, to space of three dimensions.

If σ represents a vector function, $\nabla\sigma$ may contain both a scalar and a vector part, which may be written $S\nabla\sigma$ and $V\nabla\sigma$.

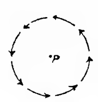
I propose to call the scalar part the Convergence of σ, because, if a closed surface be described about any point, the surface integral of σ, which expresses the effect of the vector σ considered as an inward flux through the surface, is equal to the volume integral of $S\nabla\sigma$ throughout the enclosed space. I think, therefore, that the convergence of a vector function is a very good name for the effect of that vector function in carrying its subject inwards towards a point.

But $\nabla\sigma$ has, in general, also a vector portion, and I propose, but with great diffidence, to call this vector the Curl or Version of the original vector function.

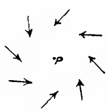
It represents the direction and magnitude of the rotation of the subject matter carried by the vector σ. I have sought for a word which shall neither, like Rotation, Whirl, or Twirl, connote motion, nor like Twist, indicate a helical or screw structure which is not of the nature of a vector at all.



CONVERGENCE.



CURL.



CONVERGENCE AND CURL.

If we subtract from the general value of the vector function σ its value σ_o at the point P, then the remaining vector $\sigma - \sigma_o$ will, when there is pure convergence, point towards P. When there is pure curl, it will point tangentially round P ; and when there is both convergence and curl, it will point in a spiral manner.

The following statements are true:-

The slope of a scalar function has no curl.

The curl of a vector function has no convergence.

The convergence of the slope of a scalar function is its concentration

The concentration of a vector function is the slope of its convergence, together with the curl of its curl."

La première moitié du XIXe siècle est donc le témoin d'un profond bouleversement de la géométrie : de Science des Figures (rapports figés de position) elle devient science de la capture physique de l'espace.

Dans un domaine, a priori très éloigné, la théorie de Galois effectue le même type de révolution. Sa théorie ne se propose plus de rechercher des "solutions" (écrire une expression du type x = ...) mais de décrire la dynamique même de cette recherche. Les quaternions, les équations de Maxwell capturent l'espace, Galois pense l'individuation progressive des racines en mathématicien.

Cette théorie des Equations (qu'il vaudrait mieux appeler théorie de l'apprentissage des équations comme on le verra plus tard) prend explicitement pour thème la symétrie et la dissymétrie de l'ensemble des racines d'une équation irréductible à coefficients entiers.

$$\text{(E)} \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o = 0.$$

Comme nous allons le voir, la symétrie n'est pas pensée par Galois comme un vague sentiment de "satisfaction esthétique" ou une propriété "astucieuse" qui permet de "simplifier les problèmes". Elle est tout à fait reliée à l'idée de virtualité du précédent paragraphe. Rappelons que les travaux de Cauchy avaient déjà montré l'existence d'un domaine $D(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ étendant les rationnels et sur lequel (E) se décompose :

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = 0.$$

L'indexation des racines sous la forme (α_i) est tout à fait arbitraire. Pour l'algébriste qui calcule sur les rationnels, ces racines n'existent pas. Ce qui existe c'est le domaine $D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et la manière dont il s'obtient à partir de E. A proprement parler, ces racines ne sont pas "possibles". Elles créent du "possible" au sens où le domaine $D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est d'autant plus vaste que les substitutions que peut effectuer un algébriste ne connaissant que les rationnels sont plus nombreuses. Ces substitutions peuvent être toutes les permutations qui échangent les racines. Il peut aussi exister des relations rationnelles "particulières" entre elles, (équations "bicarrées", équations "réciproques"). Le groupe de symétrie de l'équation (groupe de Galois) est alors le plus grand groupe de substitutions qui respecte les relations entre les racines. Il traduit notre manque de discernement entre les (α_i) mais apprécie également la dimension du nouveau domaine de rationalité $D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ qu'il constitue. Il mesure bien l'espace de liberté engendré par le problème. Ces racines n'existent que virtuellement. Elles n'agissent pas comme individus mais par la potentialité de leurs échanges.

Ces racines seront "réelles", elles passeront dans l'existence concrète dans le domaine $D(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ lorsque je ne serai pas seulement capable d'écrire un signe "formel" mais aussi d'exhiber un procédé de discernement entre ces racines. Ce procès de discernement est bien une cassure de la symétrie du groupe des racines. Discerner plus, c'est se montrer capable d'exhiber certaines "grandeurs tests", non rationnelles, et invariantes par un groupe de symétrie plus restreint. Les racines vont s'individuer au fur et à mesure de la précision des "expressions algébriques test" construites par certaines adjonctions aux rationnels.

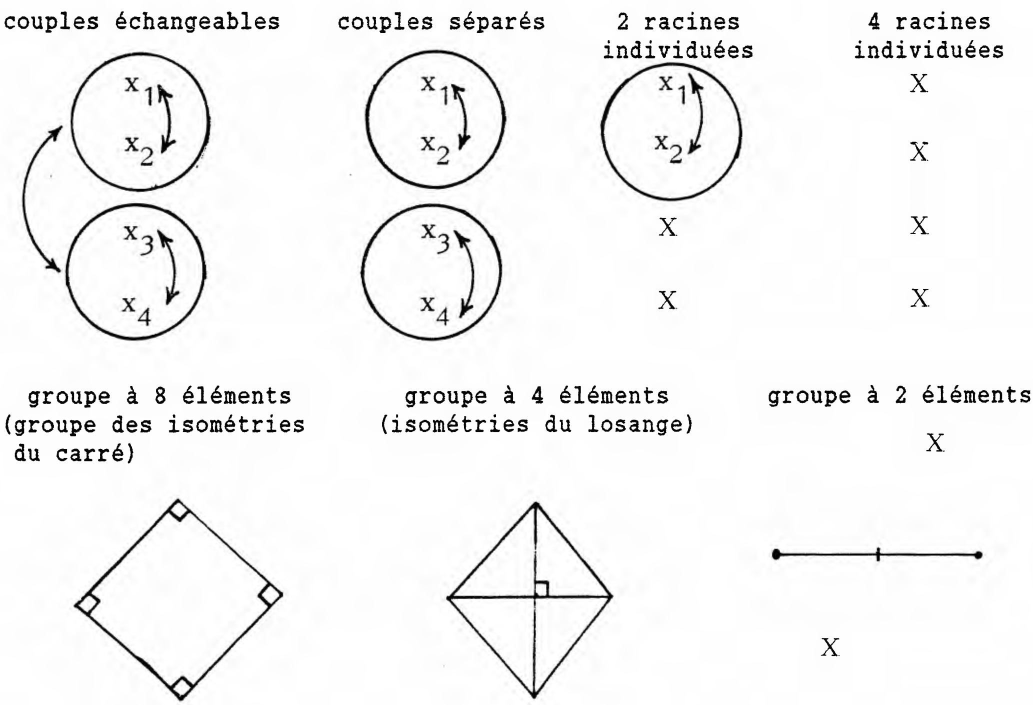
Prenons l'exemple d'une équation très particulière : l'équation bicarrée $x^4 + 2px^2 + q = 0$. Si x_1, x_2, x_3, x_4 constituent une indexation arbitraire des racines, je puis découper deux parties $\sigma_1 = (x_1,x_2)$, $\sigma_2 = (x_3,x_4)$ telles que $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$.

La distinction entre σ_1 et σ_2 est complètement "arbitraire" (l'indexation de ces couples n'est pas imposée par l'équation donnée). On peut montrer facilement que le groupe de symétrie est à huit éléments. Pour différencier "concrètement" entre σ_1 et σ_2 j'adjoins la quantité $\sqrt{p^2-q}$ aux rationnels. Je donne ainsi un sens à "l'expression test" :

$$x_1^2 - x_3^2 = \sqrt{p^2-q} = 2\sqrt{\Delta} .$$

Cette fois-ci σ_1 et σ_2 ne jouent plus "le même rôle" dans le nouveau domaine. L'algébriste qui calcule dans ce domaine pourra indexer canoniquement les couples σ_1 et σ_2. Un groupe de symétrie à quatre éléments est alors permis (échange de x_1 et x_2, x_3 et x_4 qui jouent encore respectivement "le même rôle). En introduisant la quantité $\sqrt{-p-\sqrt{\Delta}}$, je donne un sens à l'expression $x_3 - x_4 = 2\sqrt{-p-\sqrt{\Delta}}$ brisant la symétrie entre x_3 et x_4. Les racines x_3 et x_4 sont donc maintenant proprement déterminées.

Résoudre une équation, ce n'est plus poser un signe = arbitraire entre une "inconnue" et une "valeur", c'est exhiber une séquence de groupes décroissants $G_k \supset G_{k-1} \supset G_o = \{1\}$ obtenus grâce à une séquence de fonctions-test $f_k, \ldots, f_1$ telle que f_i soit invariante par le groupe G_i et non par G_{i+1}. Nous pouvons expliciter la résolution de l'équation bicarrée sous forme de diagramme :



La déconnection progressive du diagramme qui interdit les gestes d'échange correspond à l'individuation d'une figure. Ces diagrammes correspondent à une séquence de "résolvantes". Nous aurions pu partir d'un tétraèdre régulier.

Résoudre une équation c'est désormais étudier l'apprendre de la résolution des équations, c'est-à-dire exhiber une séquence de groupes décroissants qui doivent laisser des mondes de racines de plus en plus précis.

Ce que Galois avait mis en évidence pour les équations algébriques, P. Curie l'énoncera pour la Physique : "C'est la dissymétrie qui crée le phénomène". "Il existe une symétrie maximale compatible à un phénomène" :

- Un champ électrique est incompatible avec l'existence d'un centre de symétrie et un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe du champ.

- Un champ magnétique est incompatible avec un plan passant par l'axe du champ.

La dissymétrie n'est plus appréciée comme un manque, une case vide dans un programme de classification. Elle opère pour elle-même. Symétrie et dissymétrie doivent se comprendre comme un double mouvement de déploiement et d'actualisation. De l'extérieur, la symétrie apparaît comme un crible a priori de possibles. De l'intérieur, elle manifeste la potentialité (à dévoiler !) d'un monde de phénomènes ou d'une famille de solutions. Unifier des forces, résoudre une équation, c'est conformément au principe de Raison Suffisante, faire apparaître au cours du dévoilement la séquence des expériences ou des quantités algébriques qui assurera la maîtrise progressive de cette potentialité en produisant une séquence de mondes dont les êtres sont de plus en plus déterminés.

CONCLUSION

Depuis quelques années, la disgrâce dont semblait victime l'intuition géométrique semble s'estomper. On pressent que le geste géométrique est celui de la constitution même de l'espace et ne se réduit jamais à la simple "illustration" d'un raisonnement. L'enseignement classique de la géométrie se bornait surtout à étudier les rapports de distance d'une extension déjà fournie. Les diagrammes du complexe physico-géométrique explorent le continuum avant toute prise extérieure de position et plus exactement, leurs tâtonnements, leurs investigations, ne découvrent pas des saillies "cachées", elles sont ces singularités[(12)].

Il existe une puissance opératoire tout à fait particulière aux diagrammes [(13)]. Ils ne se contentent pas de visualiser des algorithmes ou de coder et de compactifier "l'information" pour la restituer sous forme de modèles ou de "paradigmes" [14]. Le diagramme est bien ce grouillement de gestes virtuels : pointer, boucler, prolonger, strier le continuum. Une simple accolade, un bout de flèche et le diagramme saute par-dessus les figures et contraint à créer de nouveaux individus[15].

Le diagramme ignore superbement toutes les vieilles oppositions "abstrait-concret", "local-global", "réel-possible". Il garde en réserve toute la plénitude et tous les secrets des fonds et des horizons que sa magie tient toujours pourtant en éveil[16].

Peut-être retrouvons-nous ainsi la symétrie des géomètres grecs. Elle ne se dépréciait pas en vague confort du regard, en satisfaction "esthétique". Elle n'épiçait pas le Monde par une "touche d'élégance". Elle manifestait simplement que quelque chose prétend à l'existence dans l'Harmonie.

NOTES

(1) Einstein ne fut jamais satisfait de sa célèbre équation reliant le tenseur de courbure au tenseur d'énergie-impulsion. Il la comparait à un temple à deux ailes : l'aile de bois (la matière) n'était pas en harmonie avec l'aile de marbre (la géométrie).

(2) Les imaginaires étaient connus au XVIe siècle. Les premiers traités de Wessel et d'Argand datent de 1797 et 1806.

Dans son livre "Spinors and Space-time", R. Penrose rend d'ailleurs hommage à ces précurseurs. Comprendre notre espace physique ne consiste nullement à écrire n = 4 dans une formule générale mais à repenser physiquement le "formalisme" des espaces vectoriels et des fibrés, à ne plus considérer l'espace comme un "cadre abstrait" mais comme un champ d'expériences cinématiques, optiques, électriques, etc.

(3) Grandeur résultant de la mesure physique de dimensions d'objets existant dans la nature et dérivant d'une échelle de comparaison : le "scalaire réel".

(4) Connus respectivement depuis Archimède et les cinématiciens du Moyen-Age.

(5) cf. l'écriture quaternionique des travaux d'Ahyah sur les solitons.

(6) cf. préface des Lectures on Quaternions "it early appeared to me that these ends might be attained by our consenting to regard algebras as being no mere art, or language, nor primarily a science of quantity but rather as science of order in progression". renvoie aussi à l'esthétique de Kant.

(7) Scalaire : de scalae, échelle.

(8) Opérateurs infinitésimaux.

(9) Il y consacra les vingt dernières années de sa vie. Il y voyait la possibilité de contempler les quantités physiques et géométriques d'une manière plus originaire : "But for many purposes of physical reasoning, as distinguised from calculation, it is desirable to avoid explicitly introducing the Cartesian coordinates, and to fix the mind at once on a point of space instead of its three coordinates, and on the magnitude and direction of a force instead of its three components. This mode of contemplating geometrical and physical quantities is more primitive and more natural than the other, although the ideas connected with it did not receive their full development till Hamilton made the next great step in dealing with space, by the invention of his Calculus of Quaternions.

As the methods of Descartes are still the most familiar to students of science, and as they are really the most useful for purposes of calculation, we shall express all our results in the Cartesian form. I am convinced, however, that the introduction of ideas, as distinguised from the operations and methods of Quaternions, will be of great use to us in the study of all parts of our subject, and especially in electrodynamics, where we have to deal with a number of physical quantities, the relations of which to each other can be expressed far more simply by a few expressions of Hamilton's, than the ordinary equations". (J. C. Maxwell)

(10) cf. l'éloge particulièrement vibrant de Maxwell à Faraday qui a vu des champs et des forces là où d'autres n'avaient vu que de la distance :

"From the straight line of Euclid to the lines of force of Faraday this has been the character of the ideas by which science has been advanced, and by the free use of dynamical as well as geometrical ideas we may hope for a further advance."

"The geometry of position is an example of a mathematical science established without the aid of single calculation. Now Faraday's lines of force occupy the same position in electro-magnetic science that pencils of lines do in the geometry of position. They furnish a method of building up an exact mental image of the thing we are reasoning about. The way in which Faraday made use of his idea of lines of force in co-ordinating the phenoma of magneto-electric induction shews him to have been in reality a mathematician of a very high order - one from whom the mathematicians of the future may derive valuable and fertile methods".

(11) $\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{E}$ $\quad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \vec{j}$ $\quad$ $\text{div}\ \vec{E} = \rho$

(12) à la fois geste et objet visé

(13) cf. "Black holes - The membrane paradigm" jusqu'aux travaux de Penrose, le point de vue de l'étoile gelée (frozen star - collapsed star) donnait la théorie des trous noirs. Une modification du diagramme "frozen star" a fait surgir la <u>dynamique</u> dans la théorie. Les calculs sont venus ensuite....

(14) C'est peut-être un complément de l'ordinateur qui excelle à traiter les algorithmes les plus complexes, éprouve des difficultés à imiter les gestes quotidiens (la main qui cherche... reconnaître une forme...). Constituer un monde suppose toujours un <u>horizon de formes non déjà reconnues mais virtuellement accessibles</u>. Cette notion : la "profondeur" semble très récalcitrante aux codes informatiques.....

(15) Cf. Feynmann : "l'électron fait ce qu'il veut. Il va où il veut..".

(16) On pourrait effectuer ce raccourci amusant de l'histoire de la notion de vecteur.

$X \longrightarrow \quad \longleftarrow X$

flèches <u>extérieures aux points</u>
Forces de Newton-Coulomb

$X \longrightarrow X$

le vecteur transport de Hamilton

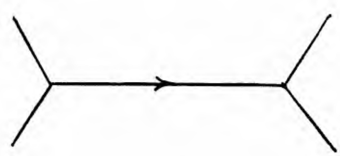


diagramme de Heisenberg-Yukawa pour les particules virtuelles